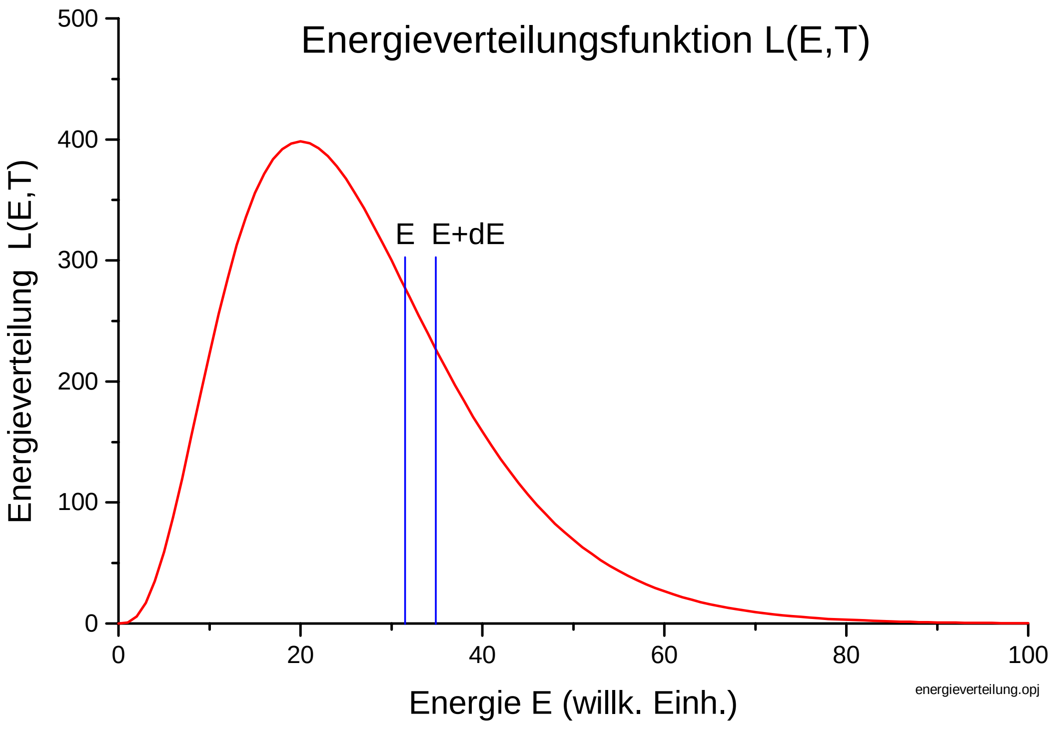
6.2 Schwarzer Strahler , Plancksche Strahlungsformel

Sehr knappe Herleitung der Planckschen Strahlungsformel

Ziel: Berechnung der Energieverteilung der Strahlung im thermischen Gleichgewicht bei der Temperatur T.



L(E,T)dE

Energie der Strahlung im Intervall E, E+dE.

Diese Energieverteilung L(E,T) war gegen Ende des 19. Jahrhunderts experimentell sorgfältig bestimmt worden.

Schwarzkörperstrahlung.

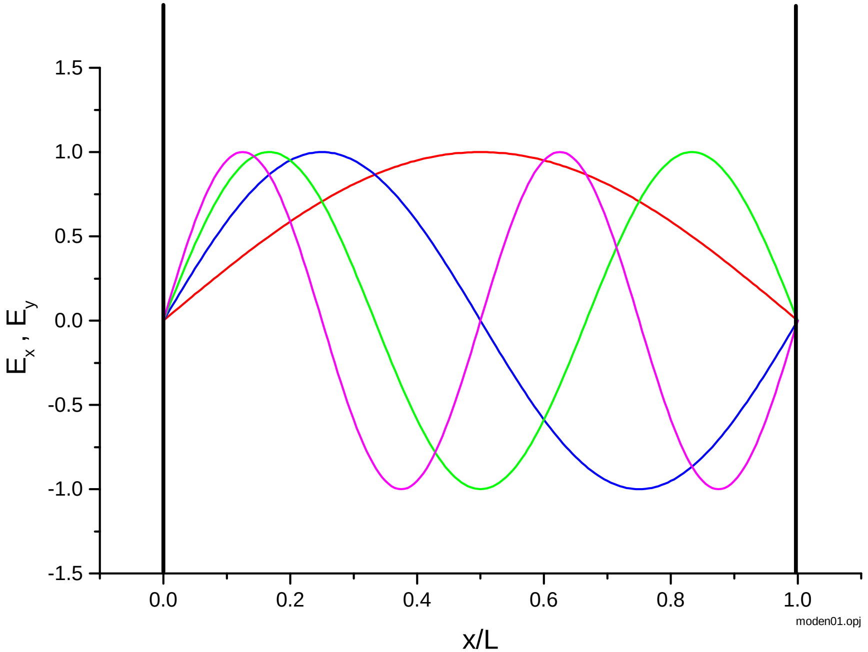
Grundideen:

1) Berechnung der Zahl der Schwingungsmöglichkeiten (Moden) von elektromagnetischen Wellen in einem Hohlraum, Volumen $V = L\cdot L\cdot L$, mit perfekt elektrisch leitfähigen Wänden.

2) Multiplikation dieser Modenverteilung mit der Wahrscheinlichkeit, daß diese Schwingungsmode der Energie $E = h\cdot\nu$ bei der Temperatur T besetzt ist.

Die Herleitung benutzt in 1) das Wellenbild zur Berechnung der Modendichte.

In 2) wird dann die Lichtquantenvorstellung $E = h\cdot\nu$ entscheidend eingesetzt.



Licht:

Transversale elektromagnetische Welle

$E \perp$ Ausbreitungsrichtung

Randbedingung für Schwingungen (stehende Wellen) entlang x:

$$E_y\,,\,E_z \equiv 0 \text{ für } x = 0 \text{ und } x = L$$

Die Maxwell-Gleichungen lassen als Lösungen harmonische Schwingungen zu:

$$E_y(x,t) \;=\; A_y \cdot \sin(k_x \cdot x) \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

$E_y(x,t)$: elektrische Feldstärke

k_x: k-Vektor der Welle

$\omega = 2\pi\nu$ Kreisfrequenz

Beliebige Anfangsphase φ

Eine analoge Lösung ergibt sich auch für $E_z(x,t)$

Durch die Wahl $\sin(k_x \cdot x)$ ist automatisch $E_y(0,t) = 0$

$E_y(L,t)$ wird dann 0, wenn $\sin(k_x \cdot L) = 0$ wird. $\Rightarrow$ $k_x \cdot L = n_x \cdot \pi$, $n_x = 1,2,3$, etc.

D.h. die durch die elektrisch leitfähigen Wände bei x = 0 und x = L aufgezwungenen Randbedingungen führen zu ganz bestimmten erlaubten Werten des Wellenvektors k_x:

$$k_x = n_x \cdot \frac{\pi}{L} \quad n_x \in N \quad n_x = 1,2,3, \text{ etc}$$

Da $k = 2\pi/\lambda$ ist , kann man die Beziehung für die Wellenlänge λ formulieren:

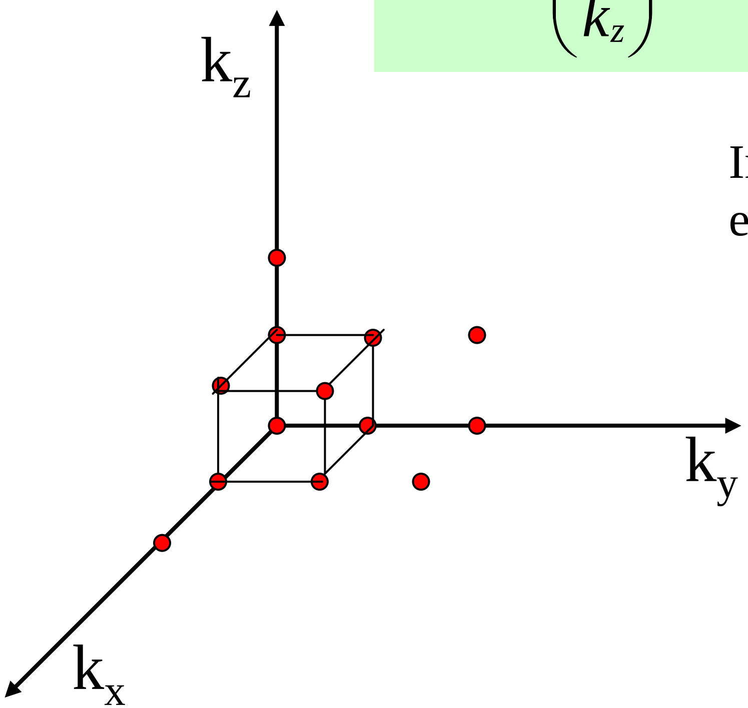
$$\lambda_x = \frac{2\pi L}{\pi} \cdot \frac{1}{n_x} = \frac{2L}{n_x}$$

Für die zweite Polarisationsrichtung $E_z(x,t)$ gelten die gleichen Randbedingungen.

Für die Schwingungen entlang der y-Richtung und entlang der z-Richtung macht man die gleichen Überlegungen und erkennt, daß für den k-Vektor **k** nur folgende Lösungen in Frage kommen (nur diese erfüllen die Randbedingungen auf den Begrenzungsebenen):

$$\underline{k} = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{\pi}{L} \right)$$

$n_x , n_y , n_z = 1,2,3,...$



Im k-Raum spannen die möglichen Lösungen ein einfaches kubisches Punktgitter auf.

Ein Punkt im k-Raum nimmt das –Raum Volumen

$$V_k = \left(\frac{\pi}{L} \right)^3$$

ein.

Der Zusammenhang zwischen k und der Frequenz ν ist eine direkte Proportionalität:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{c} \cdot \nu \qquad\qquad \nu = \frac{c}{2\pi} \cdot k$$

Zur Berechnung der Zahl der Schwingungsmoden mit Frequenzen ν im Bereich ν , ν +d ν geht man von einer Summation zu einer Integration im k-Raum über, weil die Moden im k-Raum sehr dicht liegen. Man kann L sehr groß machen, dann ist das Volumen V_k sehr klein. Formal kann man $L \to \infty$ gehen lassen, denn L ist beliebig.

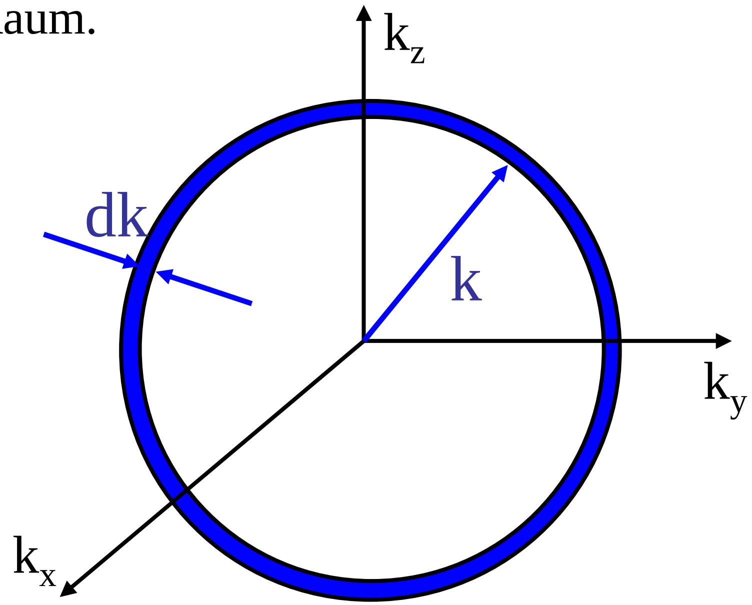
Man integriert über eine Kugelschale $4\pi k^2 dk$ im k-Raum.

Im Bereich k, k+dk liegen N(k)dk Zustände:

$$N(k)dk = \frac{1}{8} \cdot 2 \cdot \frac{4\pi k^2 dk}{V_k}$$

Nur positive Werte von nx,ny,nz

2 Polarisationsrichtungen



$$N(k)dk = \frac{1}{8}\cdot\frac{8\pi k^2 dk L^3}{\pi^3} = \frac{k^2 dk\, L^3}{\pi^2}$$

Das Volumen im Ortsraum ist V = L^3. Berechnet man jetzt die Ortsraumdichte der Moden, so muß man durch das Volumen V dividieren, und wird von L unabhängig!

$$n(k) = \frac{N(k)}{V} = \frac{N(k)}{L^3} = \frac{k^2 dk}{\pi^2}$$

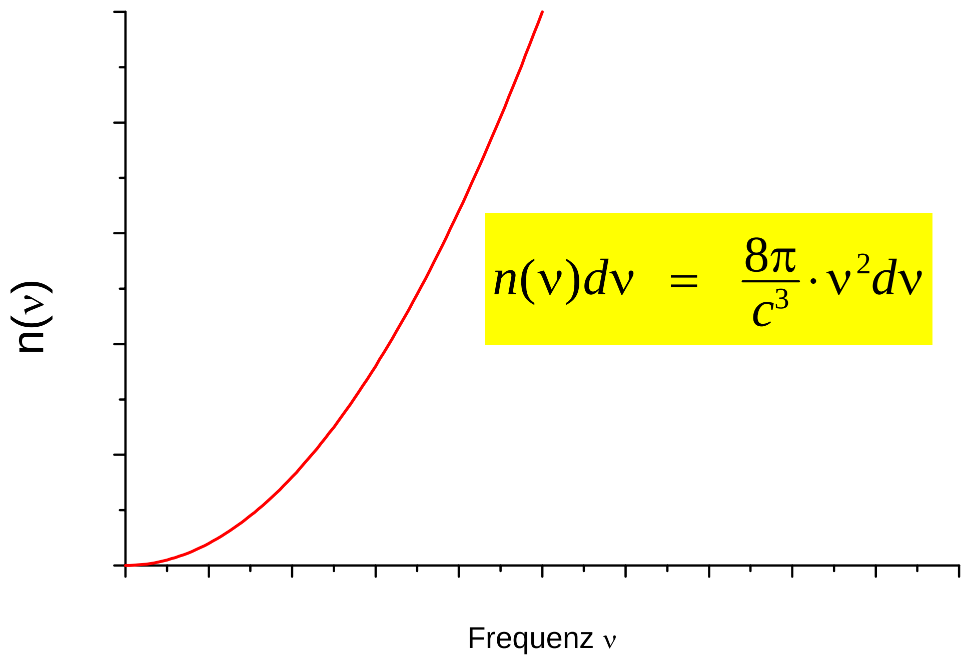
Für die Umrechnung auf Frequenzen ν benutzt man $k = (2\pi)/c\cdot\nu$ und $dk = (2\pi)/c\cdot d\nu$

$$n(\nu)d\nu = \frac{8\pi}{c^3}\cdot\nu^2 d\nu$$

$n(\nu)d\nu$ ist die Zahl der Schwingungsmoden/Volumeneinheit im Bereich ν, $\nu + d\nu$

$n(\nu)$ ist also die Modendichte: $n(\nu) = \dfrac{\text{Schwingungsmoden}}{\text{Volumen}\cdot\text{Frequenzeinheit}}$

Das quadratische Anwachsen der Modenzustandsdichte ist charakteristisch für die Zustandsdichte von Photonen (ganz allgemein von Teilchen der Ruhemasse 0).



$$n(\nu)d\nu = \frac{8\pi}{c^3}\cdot\nu^2 d\nu$$

Werte als Beispiele:

1) Im Bereich $\nu = f = 100$ MHz (UKW-Sender): $n(100\,\mathrm{MHz}) = 9.3\cdot 10^{-9}\,\frac{\mathrm{Moden}}{\mathrm{m}^3}\cdot\frac{1}{\mathrm{Hz}}$

2) Im Bereich des sichtbaren Lichtes,

$\lambda = 500$ nm, $\nu = 6\cdot 10^{14}$Hz

$$n(6\cdot 10^{14}\mathrm{Hz}) = 3.35\cdot 10^{5}\,\frac{\mathrm{Moden}}{\mathrm{m}^3}\cdot\frac{1}{\mathrm{Hz}}$$

Zur Energiedichte der Hohlraumstrahlung gelangt man durch die Quantenhypothese,

Max Planck (1900). In moderner Ausdrucksweise postuliert man:

1) Die Energie einer Mode ist mit der Frequenz einer Mode über

   $E = h\cdot\nu$ verknüpft. Diese Energie $h\cdot\nu$ eines Photons kann nur insgesamt absorbiert oder emittiert werden.

2) Im thermischen Gleichgewicht bei der Temperatur T ist eine Schwingungsmode der Energie $E = h\cdot\nu$ mit folgender Wahrscheinlichkeit besetzt:

$$f_{BE}(E,T) = \frac{1}{e^{\frac{E}{kT}} - 1} \qquad f_{BE}(\nu,T) = \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

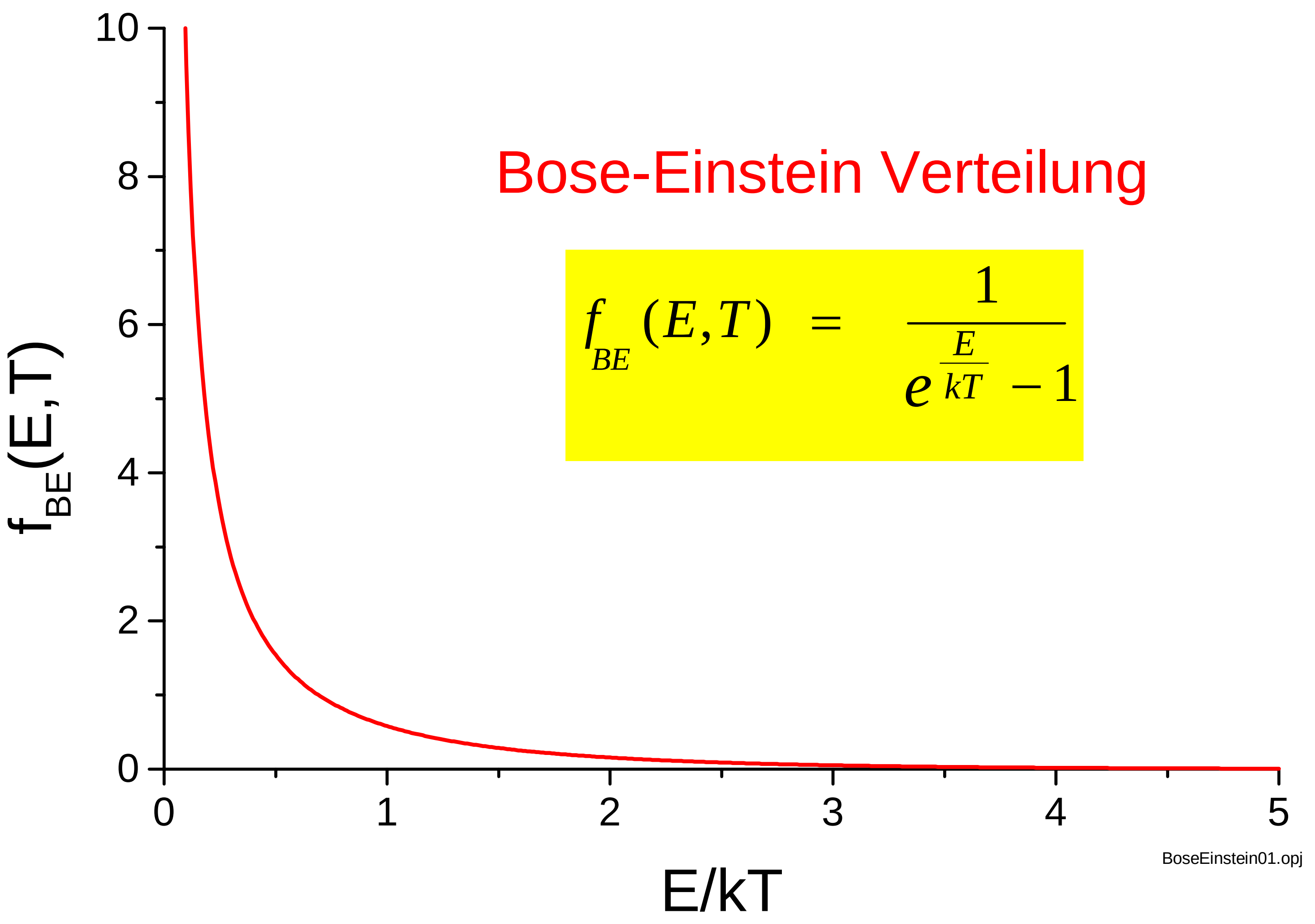
Diese fundamentale Besetzungswahrscheinlichkeit $f_{BE}(E,T)$ ist die

Bose-Einstein Statistik.

Sie gilt nicht nur für Photonen, sondern für alle Bosonen (Teilchen mit ganzzahligem Spin).

Es gibt in der Physik nur zwei fundamentale Verteilungsfunktion:

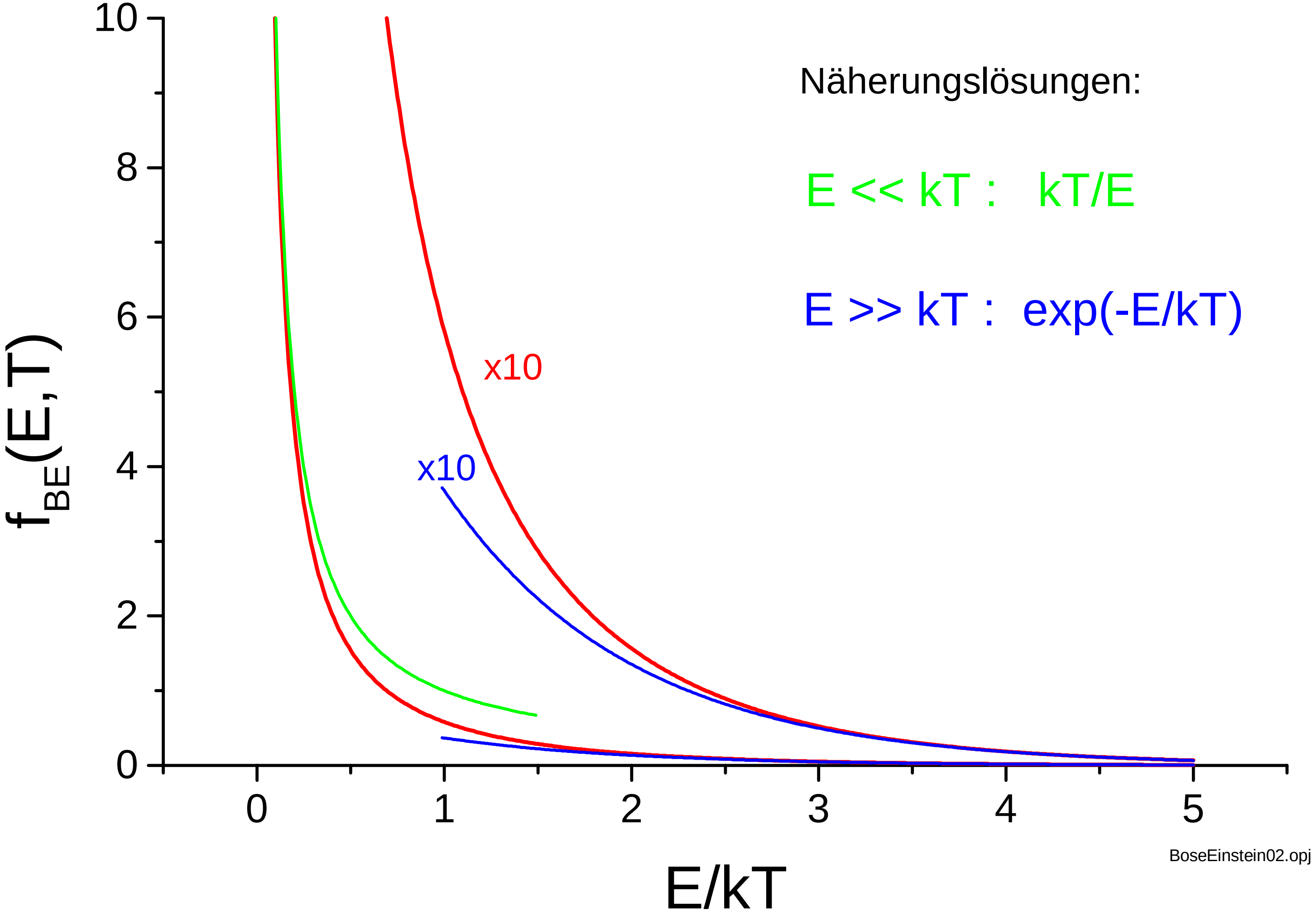
Bose-Einstein Statistik für Bosonen und Fermi-Dirac Statistik für Fermionen



Die Bose-Einstein Verteilungsfunktion beschreibt die Besetzungswahrscheinlichkeit für Bosonen-Zustände der Energie E im thermischen Gleichgewicht bei der Temperatur T

Näherungen: kleine Energien $E \ll kT$: $\exp(E/kT) \approx 1 + E/kT \Rightarrow f_{BE}(E,T) \approx kT/E$

große Energien $E \gg kT$: $\exp(E/kT) \gg 1 \Rightarrow f_{BE}(E,T) \approx \exp(-E/kT)$



Die Energiedichte u(ν,T) der Strahlung des schwarzen Körpers ist dann:

$$u(\nu,T) \;=\; \underbrace{(h\cdot\nu)}_{\text{Energie pro Mode}} \cdot \underbrace{n(\nu)}_{\text{Modendichte}} \cdot \underbrace{f_{BE}(\nu,T)}_{\text{Verteilungsfunktion}}$$

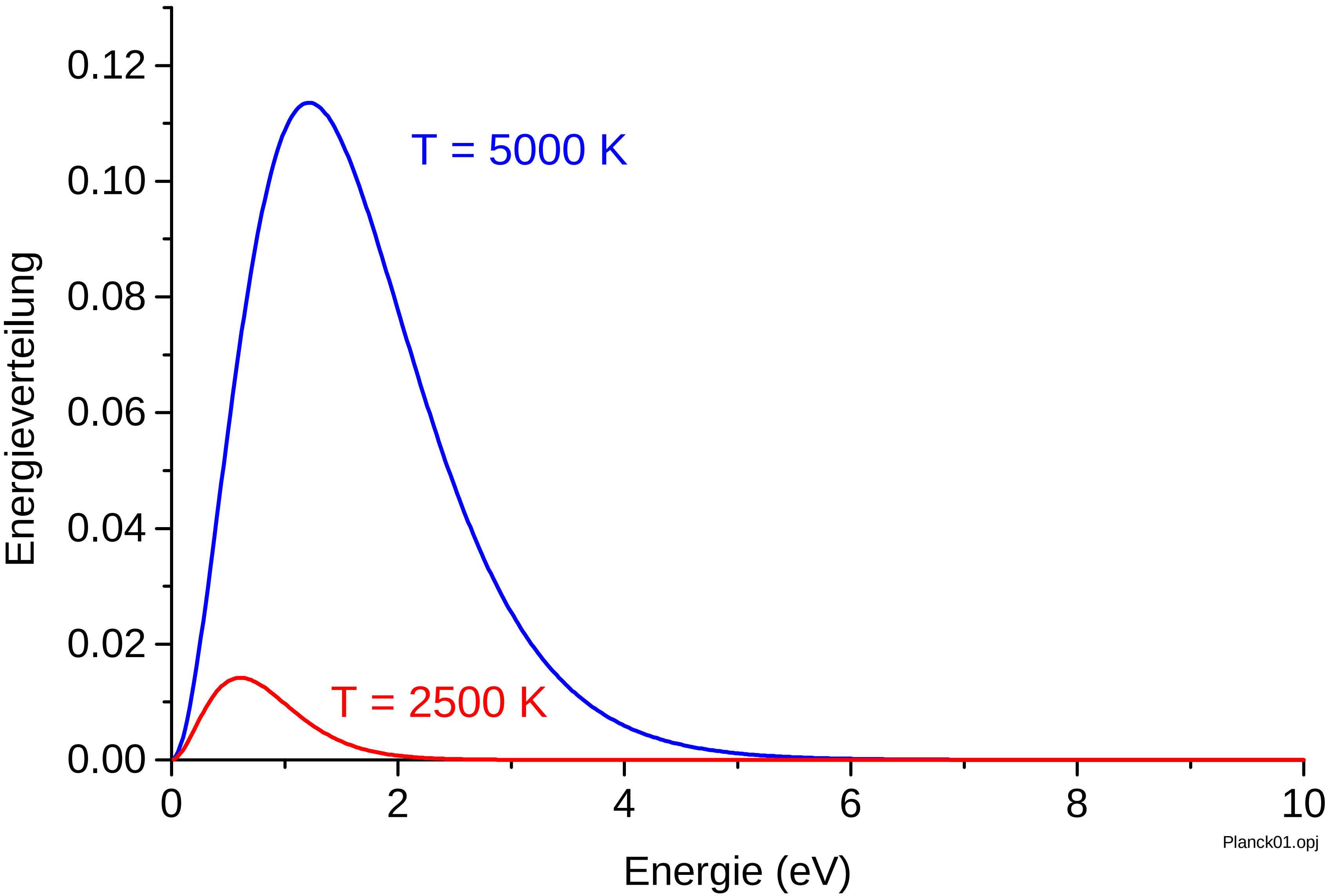
$$u(\nu,T) \;=\; \frac{8\pi h}{c^3}\cdot\nu^3\cdot\frac{1}{\exp(\frac{h\nu}{kT})-1}$$

Dies ist die Plancksche Strahlungsformel, welche die Energieverteilung der Hohlraumstrahlung (Schwarzkörperstrahlung) vollständig quantitativ beschreibt.

Zur Energieverteilung L(E,T) kommt man durch:

E = h·ν und L(E,T) = Volumen*u(E/h,T)

u(ν,T) ist im wesentlichen die Energiedichte (Energie pro Volumeneinheit)


T = 5000 K
T = 2500 K
Energieverteilung
0.00
0.02
0.04
0.06
0.08
0.10
0.12
0
2
4
6
8
10
Energie (eV)
Planck01.opj